CENTRO DE BACHILLERATO TECNOLÓGICO, industrial y de servicios #130

Matemáticas V:

Cálculo Diferencial e Integral.

Profesor: Ing. Agustín Salinas.

Cruz Fierro Carlos Francisco.

Especialidad: Técnico Laboratorista Clínico.

Semestre: V.

Agosto - Diciembre 1993.

Intervalos

¿Qué es una variable? Es una cantidad a la cual se le puede asignar un número ilimitado de valores. Trabajaremos con las últimas letras del alfabeto: v, w, x, y y z.

¿Qué es una constante? Es una cantidad en la cual durante el curso de un proceso sus valores van a ser iguales. Hay dos tipos de constantes:

- *Constante numérica:* Son valores en que sus cantidades van a ser numéricas (números).
- *Constante arbitraria:* Son valores que se van a asignar de manera arbitraria durante un proceso y que se van a conservar siempre.

Intervalo de una variable: Son valores variables que pueden tomar en un segmento en aumento o disminución según sea el caso.

¿Qué es una función? Es la relación que existe entre dos variables en la cual el valor de la primera queda determinado por la segunda. Esas variables pueden ser dependientes o independientes. La notación de una función es $f(x)$ y se lee "función de x".

Intervalo de una variable: Es cuando una variable toma valores que están comprendidos entre dos de ellos, que se denominan extremos del intervalo. Sean a y b los extremos inferior y superior respectivamente de un intervalo, la variable puede tomar cualquiera de los valores que estén comprendidos entre a y b; lo anterior se denomina amplitud del intervalo, siendo $a<b$, resultando $b-a$. La notación del intervalo es $[a,b]$ que significa "intervalo de a hacia b"; la notación para la variable es $a<x<b$ y que se lee: "x es mayor que a y menor que b".

Intervalo cerrado: Sean a y b números reales tal que $a<b$, el intervalo cerrado $[a,b]$ cuya notación representa al conjunto de los valores de la variable x tales que $a\leq x\leq b$:

$$[a,b] = \{x \mid a\leq x\leq b\}$$

Intervalo abierto: Sean a y b números reales tal que $a<b$, el intervalo abierto (a,b) cuya notación representa al conjunto de los valores de la variable x tales que $a<x<b$:

$$(a,b) = \{x \mid a<x<b\}$$

Intervalo semiabierto por la izquierda: Es el conjunto de todos los números reales mayores que a y menores o iguales que b, su notación es $(a,b]$, es decir:

$$(a,b] = \{x \mid a<x\leq b\}$$

Intervalo semiabierto por la derecha: Es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que a y menores que b, su notación es $[a,b)$, es decir:

$$[a,b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

Intervalos infinito: Se denominan intervalos infinitos:

- Al conjunto de todos los valores de la variable x tales que x es mayor que a: (a,∞).
- Al conjunto de todos los valores de la variable x tales que x es menor que b: $(-\infty,b)$.
- Al conjunto de todos los valores de la variable x tales que x es mayor o igual que a: $[a,\infty)$.
- Al conjunto de todos los valores de la variable x tales que x es menor o igual que b: $(-\infty,b]$.
- Al conjunto de los números reales: $(-\infty,\infty)$.

Dominio Y Rango De Una Función

Al definir funcion como el conjunto coordenado de números reales, tales que dos pares distintos no tienen el mismo primer elemento. Al conjunto de los números x (pares ordenados) se le denomina dominio de la función y a los segundos elementos, y, se les denomina rango de la función. El primero se abrevia Df y el segundo Rf, también se le define como la relación entre dos variables, en donde y depende de x, ya que a cada valor de x le corresponde un sólo valor de y, donde tenemos que x es la variable independiente y y la variable dependiente, por lo tanto, a x la denominamos dominio de la función y a y rango de la función.

Gráfica de una función: Es el conjunto de puntos cuyas coordenadas son valores correspondientes a la variable independiente (dominio) y variable dependiente (rango).

Clasificación Y Definición De Funciones

Clasificación De Funciones

Depende del número de variables, es decir:

- *Funciones de una variable:* Cuando el valor de una variable y (función) depende del de una variable x, tenemos una función de una variable independiente.
- *Función de varias variables:* Cuando el valor de y (función) depende de los valores de dos o más variables, tenemos una función de varias variables independientes.
- *Función algebraica:* Es aquella que está formada por un número finito de operaciones algebraicas (que son suma, resta, multiplicacion, división, potenciación y radicación).
- *Función trascendente:* Es aquella que no cumple con las características de una función algebraica, se considera función trascendente, como las circulares, circulares inversas (trigonométricas y trigonométricas inversas) exponenciales y logarítmicas.

Clasificación De Funciones Algebraicas

- *Función racional:* Es aquella cuyas variables no contienen exponentes fraccionarios ni se encuentran bajo el signo radical, se puede también expresar como el cociente de dos funciones polinominales.
- *Función irracional:* Es aquella en la cual alguna de las variables tiene exponente fraccionario o se encuentra bajo signo radical.
- *Función entera:* Es aquella que no tiene ninguna variable en el denominador y que no está afectada por exponentes negativos.
- *Función polinominal:* Sea f una función definida por:

  $$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_nx^{n-n} ,$$

  donde n es un entero positivo y a_0, a_1, a_2, ..., a_n, son números reales diferentes de cero, se denomina función polinominal.
- *Función lineal:* Es la función polinominal de grado igual a la unidad.
- *Función cuadrática:* Es la función polinominal de grado igual a dos.
- *Función cúbica:* Es la función polinominal de grado igual a tres.
- *Función idéntica:* Es la función lineal $f(x) = x$.
- *Función fraccionaria:* Es aquella que tiene una variable como denominador o está afectada por un exponente negativo.

- *Función explícita:* Es aquella en la cual la variable independiente está involucrada directamente con las operaciones indicadas, que al determinarse da el valor de la función y se puede expresar en término de una sola función.
- *Función implícita:* Es cuando se da una relación entre la variable independiente y la variable dependiente por medio de una ecuación no resulta para ninguna de las variables.

Operaciones Con Funciones

Adición Y Multiplicación

Dadas las funciones de variables real f y g con dominio y rango respectivamente, entonces la adición $f+g$ y la multiplicación $f \cdot g$ son funciones con dominio $Df \cap$ Dg y reglas correspondencia:

$$[f+g](x) = f(x) + g(x)$$

$$f+g = \{x, f(x) + g(x) \mid x \in Df \cap Dg\}$$

Es decir, el valor de $f+g$ en x es la suma de los valores de f y g en x.

$$[f \cdot g](x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$f \cdot g = \{x, f(x) \cdot g(x) \mid x \in Df \cap Dg\}$$

Es decir, el valor de $f+g$ en x es el producto de los valores de f y g en x.

Concepto De Límite

Los límites nos revelan el comportamiento de una función cerca de un punto, ya que una función es el conjunto de pares ordenados (x,y), en que el valor de y se relaciona con x por medio de una regla de correspondencia, pero qué sucede cuando a x se le asignan valores que se aproximan más a un número a, se obtiene el límite de una función cuando x tiene a a:

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

De lo anterior, consideramos el límite de una función como un número a que puede estar o no en el domino de f, esto es, que $f(a)$ no está definida. Si existe un número L tal que $f(x)$ se aproxime cada vez más a L cuando x se acerca más a a, se dice que el límite de x a medida que x tiende a a es L:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a puede no existir. Hay dos razones por las cuales podría no existir:

- Los valores de la función de x pueden ser mayores a medida que x se acerca a a.
- El límite de la función de x puede asumir diferentes valores cuando x se acerca a a desde distintas direcciones.

Propiedades De Los Límites

- El límite de una constante c cuando x tiende a a es igual a c.
- El límite de x cuando x tiende a a es igual a a.
- Si una constante y una función, el límite del producto $c \cdot f$ cuando x tiende a a es igual al producto de la constante por el límite de la función.
- Si f y g (funciones), el límite del producto $f \cdot g$ cuando x tiende a a es igual al producto de los límites de las funciones.
- Si f y g (funciones), el límite de una suma o diferencia es igual a la suma o diferencia de los límites de las funciones.

Cálculo Del Límite De Funciones

Existen básicamente dos casos para el cálculo del límite:

Cuando una función es simplificada se sustituye el valor directamente a que tiende la variable independiente. Al aplicar las propiedades de los límites en la determinación del límite, al sustituir el valor de la variable al que tiende la misma, se encuentra el límite de la función.

A veces es necesario simplificar la ecuación antes de sustituir la variable, ya que de no hacerlo da lugar a la indeterminación $(0 \div 0)$. La transformación de la expresión dada se obtiene por medio de la factorización del numerador y en algunos casos del denominador.

Derivación De Funciones

La Derivada Como Razón De Cambio

Hay varias aplicaciones del conocimiento de razón de cambio, por ejemplo: los índices de deserción escolar, costos de producción. Estas razones de cambio se refieren con relación al cambio con respecto al tiempo, pero a su vez puede ser con respecto a cualquier variable relacionada.

Por lo que resumimos que es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable dependiente cuando esta tiende a cero.

Otra definición de la derivación de funciones es una función prima $f'(x)$ definida como el límite que representa un cambio.

La razon de cambios instantáneos de y en x se representa por:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Derivadas De Sumas, Productos, Cocientes Y Funciones Compuestas

Fórmulas Para Las Derivadas De Las Funciones

1. $\frac{d}{dx}c = 0$
2. $\frac{d}{dx}cf(x) = c\frac{d}{dx}f(x)$
3. $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

4. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

5. $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

6. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

7. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

8. $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

9. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc x$

10. $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a \qquad \text{si } a > 0$

11. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

12. $\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} \qquad \text{si } a > 0, a \neq 0$

13. $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

14. $\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

16. $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

17. $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

18. $\frac{d}{dx}\operatorname{arccsc} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

19. $\frac{d}{dx}\operatorname{arccot} x = \frac{-1}{1+x^2}$

20. $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$

21. $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$

22. $\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$

23. $\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$

24. $\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$

25. $\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x$

Derivada De La Suma De Funciones

La derivada de una suma o diferencia de dos o más funciones es la suma o diferencia de las derivadas de las funciones:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$$

Derivada Del Producto De Dos Funciones

La derivada del producto de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ es igual a $f(x)$ multiplicando la derivada de $g(x)$, más $g(x)$ multiplicando a la derivada de $f(x)$:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

Derivada Del Cociente De Dos Funciones

La derivada del cociente es el producto del denominador por la derivada del numerador, menos el producto del numerador por la derivada del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}$$

Todo esto, siempre y cuando $g(x) \neq 0$.

Derivada De Funciones Compuestas

Regla De La Cadena:

Para hallar la derivada de la composición de dos funciones $f[g(x)]$, usamos dicha regla. La primera dificultad que se presenta consiste en reconocer una expresión compuesta cuando ésta aparezca. Los libros de texto usan la notación $(g^{\circ} f)(x)$ para funciones compuestas. La notación de la regla de la derivación en cadena es:

$$\frac{d}{dx}f[g(x)] = \frac{d}{dx}f[g(x)]\frac{d}{dx}g(x)$$

Fórmulas Para Las Derivadas De Las Funciones Compuestas:

Se emplea u para representar la función interior:

1. $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{d}{dx}u$
2. $\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\frac{d}{dx}u$

3. $\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u\frac{d}{dx}u$

4. $\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u\frac{d}{dx}u$

5. $\frac{d}{dx}\sec u = \sec u\tan u\frac{d}{dx}u$

6. $\frac{d}{dx}\csc u = -\csc u\cot u\frac{d}{dx}u$

7. $\frac{d}{dx}\cot u = -\csc u\frac{d}{dx}u$

8. $\frac{d}{dx}a^u = a^u\ln u\frac{d}{dx}u \qquad \text{si } a > 0$

9. $\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{d}{dx}u$

10. $\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{d}{dx}u$

11. $\frac{d}{dx}\arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{d}{dx}u$

12. $\frac{d}{dx}\arccos u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{d}{dx}u$

13. $\frac{d}{dx}\arctan u = \frac{1}{1+u^2}\frac{d}{dx}u$

14. $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{d}{dx}u$

15. $\frac{d}{dx}\operatorname{arccsc} u = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{d}{dx}u$

16. $\frac{d}{dx}\operatorname{arccot} u = \frac{-1}{1+u^2}\frac{d}{dx}u$

Derivación De Funciones Implícitas

Cuando se da una relación entre x y y por medio de una ecuación no resuelta para y, a y se le llama función implícita de x, por ejemplo la ecuación $x^2 - y = 4$ define a y como función implícita de x. Es claro que por medio de esta ecuación, x se define igualmente como función implícita de y. Para la derivación de funciones implícitas puede no ser conveniente resolver la ecuación para obtener a y como función explícita de x, o x como función explícita de y.

Para calcular la derivada se sigue la siguiente regla: "Derivar la ecuación, término a término, considerando a y como función de x, y de la ecuación resultante despejar la derivada de y con respecto de x".

En la derivada pueden sustituirse solamente los valores correspondientes de x y y que satisfacen a la ecuación dada.

La regla fundamental dice derivar a x con respecto a y y despejar dy/dx y cuando se derive a y se sustituye por $d/dx(y) = dy/dx$.

Cabe hacer notar que en general el resultado contendrá tanto a x como a y.

Valores De Máximos Y Mínimos

Una función $y = f(x)$ se llama función creciente si y aumenta algebraicamente cuando x aumenta y se llama función decreciente si y disminuye algebraicamente cuando x aumenta.

Un valor de una función es máximo si es mayor que cualquiera de los valores que le anteceden o le siguen inmediatamente. Un valor de una función es mínimo si es menor que cualquiera de los valores que le anteceden o le siguen inmediatamente.

$f(x)$ es un máximo si $f'(x)$ o derivada es igual a cero y si $f'(x)$ cambia de signo pasando de menos a más. $f(x)$ es un mínimo si $f'(x)$ o derivada es igual a cero y si $f'(x)$ cambia de signo pasando de más a menos.

Primer Método

1. Se halla la primera derivada de la función.

2. Se iguala la primera derivada a cero, y se hallan las raíces reales de la ecuación resultante. Estas raíces son los valores críticos de la variable.

3. Se consideran los valores críticos uno por uno, y se calculan los signos de la primera derivada, en primer lugar para un valor un poco menor que el valor crítico (en este caso decimos un poco menor es cuando queremos indicar cualquier valor entre la primera raíz o valor crítico que se considera y la raíz inferior a la más próxima); y después para un valor un poco mayor que él (un poco mayor significa cualquier valor entre la raíz que se considera y la próxima mayor).

Si el signo de la derivada es primeramente positivo y después negativo, la función tiene un máximo para este valor crítico, en el caso contrario tiene un mínimo. Si el signo no cambia, la función no tiene ni máximo ni mínimo para el valor crítico considerado (valores críticos son los valores de la variable independiente que satisfacen la ecuación $f(x) = 0$).

Segundo Método

Para obtener los máximos y mínimos por un segundo método existen cuatro pasos:

1. Se determina la primera derivada y se iguala a cero.

2. Se determinan los valores reales o críticos con respecto a la ecuación de la primera derivada.

3. Se determina la segunda derivada de la función dada.

4. Se sustituyen los valores críticos en la segunda derivada y si el resultado es negativo se dice que existe un mínimo; y si el resultado es positivo se dice que existe un máximo.

Cálculo Integral

Función Primitiva

En el cálculo diferencial hemos aprendido a calcular la derivada de una función dada, operación que se indica $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) \rightarrow df(x) = f'(x)dx$.

Los problemas de cálculo integral dependen de la operación inversa, hallar una función $f(x)$ cuya derivada es conocida: dada la diferencial de una función hallar la función. La función $f(x)$ que así se obtiene se llama una integral de la expresión diferencial dada; el procedimiento para hallarla se llama integración, la operación se indica indicando el signo integral ($\int$) delante de la expresión diferencial dada:

$$\int f'(x)dx = f(x)$$

La expresión anterior se lee "Integral de $f'(x)$ diferencial de x, es igual a la función $f(x)$". En general el signo $\int$ se lee "Integral" o "Integral de". La diferencial de x (dx) indica que x es la variable de integración.

En resumen, en el cálculo integral siempre se dará la diferencial de una función primitiva y nos pedirá encontrar la función primitiva, tal que al diferenciarla obtengamos la derivada que se nos dio al principio.

Fórmulas Para La Integración

1. $\int\left(du + dv - dw\right) = \int du + \int dv - \int dw$
2. $\int a du = a\int du$
3. $\int dx = x + c$
4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln u + c$, ver fórmula 28
6. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$
7. $\int e^u du = e^u + c$
8. $\int \sin u du = -\cos u + c$
9. $\int \cos u du = \sin u + c$

10. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + c$

11. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + c$

12. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + c$

13. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + c$

14. $\int \tan u\,du = -\ln \cos u + c = \ln \sec u + c$

15. $\int \cot u\,du = \ln \sin u + c$

16. $\int \sec u\,du = \ln(\sec u + \tan u) + c$

17. $\int \csc u\,du = \ln(\csc u + \cot u) + c$

18. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + c$

19. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{u-a}{u+a} + c \qquad u^2 > a^2$

20. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+u}{a-u} + c \qquad a^2 > u^2$

21. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c$

22. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2+a^2}\right) + c$

23. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2-a^2}\right) + c$

24. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{u}{a} + c$

25. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + c$

26. $\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2+u^2}\right) + c$

27. $\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{u^2-a^2}\right) + c$

28. $\int u^{-1}\,du = \ln u + c$

Constante De Integración

Al derivar funciones que sólo varíen en una constante se llega al mismo resultado. Si integramos esto, no podríamos définir cuál sería la función primitiva exacta. Por ello, al integrar, se agrega una constante c para abarcar estas formas, recordando que la derivada de una constante es cero.