

CENTRO DE BACHILLERATO TECNOLÓGICO,
industrial y de servicios #130

Matemáticas III:

Geometría Plana y Trigonometría.

Profesor: Ing. Ángel Arturo Díaz Cortés.

Cruz Fierro Carlos Francisco.

Especialidad: Técnico Laboratorista Clínico.

Semestre: III.

Agosto - Diciembre 1992.





Geometría Plana

RESEÑA HISTÓRICA

Los primeros conocimientos geométricos que tuvo el hombre consistían en un conjunto de reglas prácticas. Para que la geometría fuera considerada como ciencia tuvieron que pasar muchos siglos, hasta llegar a los griegos. Es en Grecia donde se ordenan los conocimientos empíricos adquiridos por el hombre a través del tiempo y, al remplazar la observación y la experiencia por deducciones racionales, se eleva la geometría al plano rigurosamente científico.

Babilonia:

En la Mesopotamia, región situada entre el Tigris y el Éufrates, floreció una civilización cuya antigüedad se remonta a 57 siglos aproximadamente. Los babilonios fueron, hace cerca de 6000 años, los inventores de la rueda. Tal vez de ahí provino su afán por descubrir las propiedades de la circunferencia y esto los condujo a que la relación entre la circunferencia y su diámetro era aproximadamente igual a 3. Este valor es famoso porque también se da en el Antiguo Testamento (primer libro de los reyes).

Los babilonios lo hallaron considerando que la longitud de la circunferencia era un valor intermedio entre los perímetros de los cuadrados inscrito y circunscrito en una circunferencia. Cultivaron la astronomía y conocieron que el año tiene aproximadamente 360 días, dividieron la circunferencia en 360 partes iguales obteniendo el grado sexagesimal. También sabían trazar el hexágono regular inscrito y conocían una fórmula para hallar el área del trapecio rectángulo.

Egipto:

La base de la civilización egipcia fue la agricultura. La aplicación de los conocimientos geométricos a la medida de la tierra fue la causa de que se diera a esta parte de la matemática el nombre de "geometría", que significa medida de la tierra.

Los reyes de Egipto dividieron las tierras en parcelas, cuando el Nilo en sus crecidas se llevaba parte de las tierras, los agrimensores tenían que rehacer las divisiones y calcular cuánto debía pagar el dueño de la parcela por concepto de impuesto, ya que éste era proporcional a la tierra cultivada. Pero la necesidad de medir las tierras no fue el único motivo que tuvieron los egipcios para estudiar las matemáticas, pues sus sacerdotes cultivaron la geometría aplicándola a la construcción.

Hace más de 20 siglos fue construida la "Gran Pirámide"; un pueblo que emprendió una obra de tal magnitud poseía, sin lugar a dudas, extensos conocimientos de geometría y de astronomía, ya que se ha comprobado que, además de la precisión con que están determinadas sus dimensiones, la Gran Pirámide de Egipto está perfectamente orientada.



La matemática egipcia la conocemos principalmente a través de los papiros. Entre los problemas geométricos que aparecen resueltos en ellos se encuentran los siguientes:

- Área del triángulo isósceles.
- Área del trapecio isósceles.
- Área del círculo.

Además, en los papiros hay un estudio sobre los cuadrados que hacen pensar que los egipcios conocían algunos casos particulares de la propiedad del triángulo rectángulo, que más tarde immortalizó a Pitágoras.

Grecia:

La geometría de los egipcios era eminentemente empírica, ya que no se basaba en un sistema lógico deducido a partir de axiomas y postulados.

Los griegos, grandes pensadores, no se contentaron con saber reglas y resolver "problemas particulares". No se sintieron satisfechos hasta obtener explicaciones racionales de las cuestiones en general y especialmente de las geométricas. En Grecia comienza la geometría como ciencia deductiva.

Tales de Mileto (siglo VII a.C.): Representa los comienzos de la Geometría como ciencia racional. Sus estudios lo condujeron a resolver ciertas cuestiones como la determinación de distancias inaccesibles, la igualdad de los ángulos de la base del triángulo isósceles, el valor del ángulo inscrito y la demostración de los teoremas que llevan su nombre.

Pitágoras de Samos (siglo VI a.C.): Se dice que fue discípulo de Tales. El descubrimiento de la relación $a^2 = b^2 + c^2$ para cualquier triángulo rectángulo y su demostración se deben indiscutiblemente a Pitágoras.

Euclides (siglo IV a.C.): Escribió una de las obras más famosas de todos los tiempos: los "Elementos". Euclides construye la geometría partiendo de definiciones, postulados y axiomas con los cuales demuestra teoremas que, a su vez, le sirven para demostrar otros teoremas.

Platón (siglo IV a.C.): Para Platón las matemáticas no tienen finalidad práctica: sólo se cultiva con el único fin de conocer. Dividió la geometría en elemental y superior. La geometría elemental comprendía todos los problemas que se podían resolver con regla y compás. La geometría superior estudiaba los tres problemas más famosos de la geometría antigua no resolubles con regla y compás:

- Cuadratura del círculo.
- Trisección del ángulo.
- Duplicación del cubo.



Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.): Calculó un valor más aproximado de pi, el área de la elipse, el volumen del cono y de la esfera. Estudió la espiral de Arquímedes que sirve para la trisección del ángulo.

Apolonio de Pérgamo (260-200 a.C.): Estudió ampliamente las secciones cónicas determinando casi todas sus propiedades.

Herón de Alejandria (siglo II d.C.): Demostró la conocida fórmula que lleva su nombre, para hallar el área de un triángulo en función de sus lados.

CONCEPTOS PRELIMINARES

La geometría elemental es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades intrínsecas de las figuras, es decir, las que no se alteran con el movimiento de las mismas.

Cuando estudia figuras contenidas en un plano (dos dimensiones) se llama geometría plana. Si estudia cuerpos geométricos de tres dimensiones se llama geometría del espacio. Hay otras geometrías que constituyen especialidades dentro del campo de las matemáticas: geometría analítica, geometría descriptiva, geometría proyectiva...

Método Deductivo: Es el usado en la ciencia y principalmente en la geometría. Este método consiste en encadenar conocimientos que se suponen verdaderos de manera tal que se obtienen nuevos conocimientos (conclusión o paradigma). Es decir, obtener nuevas proposiciones como consecuencia lógica de otras anteriores.

Axioma: Es una proposición tan sencilla y evidente que se admite sin demostración, por ejemplo, «El todo es mayor que cualquiera de sus partes».

Postulado: Es una proposición no tan evidente como un axioma, pero también se admite sin demostración, por ejemplo, «Hay infinitos puntos».

Teorema: Es una proposición que puede ser demostrada. La demostración consta de un conjunto de razonamientos que conducen a la evidencia de la verdad de la proposición. En el enunciado de todo teorema se distinguen dos partes, hipótesis (lo que se supone) y tesis (lo que se quiere demostrar). Por ejemplo, en el teorema «La suma de los ángulos interiores de un triángulo vale dos rectos», la hipótesis puede ser «A, B y C son ángulos interiores de un triángulo» y la tesis «La suma de los ángulos A, B y C vale dos rectos».

En la demostración, se utilizan los conocimientos adquiridos enlazados de una manera lógica.

Corolario: Es una proposición que se deduce de un teorema, como consecuencia del mismo. Por ejemplo, del teorema anterior se deduce el siguiente corolario: «La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo vale un recto».



Teorema recíproco: Todo teorema tiene su recíproco. La hipótesis y tesis del recíproco son, respectivamente, la tesis e hipótesis del otro teorema, que en este caso se llama teorema directo. Por ejemplo, del teorema «La suma de los ángulos agudos de un triángulo vale dos rectos», obtenemos el siguiente recíproco: «Si la suma de los ángulos interiores de un polígono vale dos rectos, el polígono es un triángulo».

No siempre los teoremas recíprocos son verdaderos. Así, por ejemplo, hay un teorema que dice «Las diagonales de un cuadrado son iguales» y su recíproco dice: «Si las diagonales de un paralelogramo son iguales, la figura es un cuadrado». Este recíproco es falso porque la figura puede ser un rectángulo que también tiene sus diagonales iguales.

Lema: Es una proposición que sirve de base a la demostración de un teorema. Es como un teorema preliminar a otro que se considera más importante. Por ejemplo, para demostrar el volumen de una pirámide se tiene que demostrar antes el lema que dice «Un prisma triangular se puede descomponer en tres tetraedros equivalentes».

Escolio: Es una observación que se hace sobre un teorema previamente demostrado. Por ejemplo, después de demostrar un teorema que dice «En una misma circunferencia o en circunferencias iguales a mayor arco, corresponde mayor cuerda», se puede añadir como escolio: «Si no se consideran arcos menores que una semicircunferencia, a mayor arco corresponde menor cuerda».

Problema: Es una proposición que incorpora todo lo anterior e implica una acción de pensamiento y trabajo. Se considera como teoremas en acción y se llega a una conclusión y a una solución verdadera si el proceso es correcto.

CONCEPTOS GEOMÉTRICOS BÁSICOS

Punto: El punto existe como idea y se define como algo tan pequeño que sólo tiene una representación. Un punto geométrico es imaginado tan pequeño que carece de dimensión.

Línea: Es un tipo especial de conjunto de puntos. Tiene una sola dimensión: la longitud.

Línea recta: Es el menor conjunto de puntos que unen dos puntos A y B por la distancia más corta. La recta se suele designar por dos de sus puntos con una flecha de dos puntas encima; así, la recta que une A y B se representa: \overleftrightarrow{AB} . Una recta geométrica se extiende sin límite en dos sentidos. No comienza ni termina. Se admiten los siguientes postulados:

- Por dos puntos pasa una recta y solamente una.
- Dos rectas no pueden tener más que un solo punto en común.

Línea curva: Toda aquella línea que no es recta. Actualmente se considera que las líneas curvas pueden tener trazos rectos o no tenerlos. Los tipos especiales de curvas que se consideran más importantes son:



- Línea quebrada formada por trazos rectos.
- Curva simple cerrada

La curva simple cerrada se puede trazar de tal manera que empieza y termina en el mismo punto y éste es el único que se toca dos veces. Este tipo de curva tiene un interior y un exterior, y se admite el siguiente postulado: «Al unir un punto interior A con un exterior B de una curva simple cerrada, se corta dicha curva».

Son cuerpos físicos todas las cosas que nos rodean: libros, lápices, mesas; tienen forma, color, están hechos de una sustancia determinada y ocupan un lugar en el espacio. Hay esquemas ideales de ciertos cuerpos físicos de los cuales la geometría considera solamente su forma y su tamaño. Son los cuerpos geométricos o sólidos; como los prismas, esferas, etcétera. Los sólidos tienen tres dimensiones: largo, ancho y alto.

Las superficies son los límites que separan a los cuerpos del espacio que los rodea. Las superficies tienen dos dimensiones: largo y ancho.

RECTAS Y PLANOS

Semirrecta: Si sobre una recta señalamos un punto A, se le llama semirrecta al conjunto de puntos formados por el A y todos los que le siguen o todos los que le preceden. El punto A es el origen de la semirrecta. Una semirrecta se suele representar por el origen y otro punto de ella con una flecha de una punta encima. Así, la semirrecta de origen C y otro punto D se representa por \overrightarrow{CD} .

Segmento: Si sobre una recta señalamos dos puntos A y B, se llama segmento el conjunto de puntos comprendidos entre A y B más estos dos puntos, que se llaman extremos del segmento. Generalmente al que se nombre en primer lugar se le llama origen; al otro, extremo. Un segmento se designa por las letras de sus extremos y con un trazo encima; así, el segmento que va de E a F se representa por \overline{EF} .

Se admite el siguiente postulado: «La distancia más corta entre dos puntos es el segmento que los une».

Plano: Un plano es un conjunto parcial de infinitos puntos. Un plano en matemáticas se imagina de extensión ilimitada. Se suele representar por un paralelogramo y se nombra por tres de sus puntos no alineados o por una letra griega, por ejemplo, plano ABC o plano α .

Se admiten los siguientes postulados:

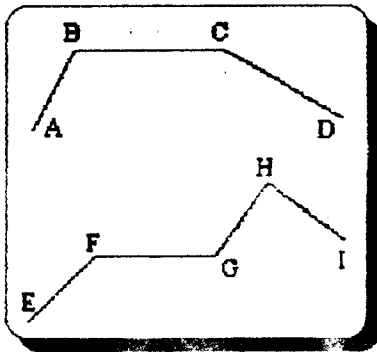
- «Por tres puntos no alineados pasa un plano y solamente uno».
- «Si una recta tiene dos puntos comunes con un plano, toda la recta está en el plano».



Semiplano: Toda recta de un plano lo divide en dos regiones llamadas semiplanos. Cada punto del plano corresponde a uno de los semiplanos, excepto los puntos de la recta, que pertenecen a los dos.

Se admite el siguiente postulado: «Si dos planos tienen un punto en común, tienen una recta en común». En ese caso, la recta se llama recta de intersección de los dos planos.

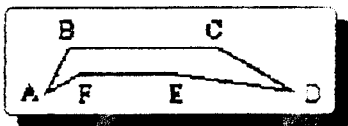
Poligonales: A las líneas quebradas se les llama también poligonales y, en este caso los segmentos que las forman reciben el nombre de lados y a los puntos comunes se les llama vértices.



Poligonal convexa: Si al prolongar en los dos sentidos cualquiera de sus lados, toda la poligonal queda en un mismo semiplano (ABCD).

Poligonal cóncava: Si al prolongar en los dos sentidos alguno de sus lados, parte de la poligonal queda en un semiplano y parte en el otro (EFCHI).

Teorema 1:



«En dos poligonales convexas de extremos comunes la envolvente es mayor que la envuelta»

Hipótesis: ABCD poligonal envolvente, AFED poligonal envuelta, A y D extremos comunes.

Tesis: $AB + BC + CD > AF + FE + ED$

Construcción auxiliar: Se prolonga AF hasta cortar a BG en G y FE hasta cortar a CD en H.

Demostración: En ABGF tenemos que $\overline{AB} + \overline{BG} > \overline{AF} + \overline{FG}$. En FGCH tenemos que $\overline{FG} + \overline{GC} + \overline{CH} > \overline{FE} + \overline{EH}$. En EHD tenemos que $\overline{EH} + \overline{HD} > \overline{ED}$.

Sumando tenemos que:

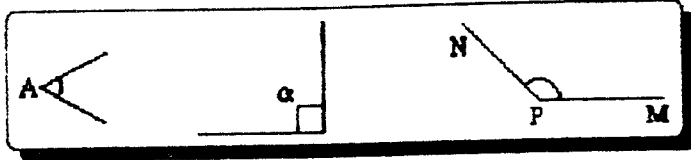
$$\overline{AB} + \overline{BG} + \overline{FG} + \overline{GC} + \overline{CH} + \overline{EH} + \overline{HD} > \overline{AF} + \overline{FG} + \overline{FE} + \overline{EH} + \overline{ED}$$

Pero $\overline{BG} + \overline{GC} = \overline{BC}$ y $\overline{CH} + \overline{HD} = \overline{CD}$, por lo que sustituyendo y eliminando términos semejantes, nos queda: $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AF} + \overline{FE} + \overline{ED}$, como se quería demostrar.



Ángulos

Ángulo es la abertura formada por dos semirrectas con un mismo origen llamado vértice. Las semirrectas se llaman lados, el ángulo se designa por una letra mayúscula situada en el vértice, a veces se utiliza una letra griega dentro del ángulo. También se utilizan 3 letras mayúsculas de manera que quede en medio la letra que está situada en el vértice del ángulo. La figura representa los ángulos $\angle A$, $\angle \alpha$ y $\angle MPN$.



Medir un ángulo es compararlo con otro que se toma por unidad. Desde muy antiguo se ha tomado como unidad el grado sexagesimal que se obtiene al considerar a la circunferencia dividida en 360 partes iguales, por lo que un ángulo de un grado es el que tiene el vértice en el centro y sus lados pasan por dos divisiones consecutivas. Cada división de la circunferencia se llama también grado. Cada grado se encuentra dividido en 60 partes iguales llamadas minutos y cada minuto en 60 partes iguales llamadas segundos. Los símbolos de estas unidades son grados ($^{\circ}$), minutos ($'$) y segundos ($''$). Por ejemplo, si un ángulo mide 38 grados, 15 minutos y 12 segundos, se escribe: $38^{\circ} 15' 12''$.

Modernamente se considera también a veces la circunferencia dividida en 400 partes iguales, llamadas "grados centesimales". Cada grado tiene 100 "minutos centesimales" y cada minuto tiene 100 "segundos centesimales". Este sistema, llamado sistema centesimal, es poco usado. Por ejemplo, si un ángulo mide 72 grados, 50 minutos y 18 segundos centesimales, se escribe: $72^{\circ} 50^m 18^s$.

También existe otro sistema, llamado sistema circular, en el que se usa como unidad el ángulo llamado "radián". Un radián es el ángulo cuyos lados comprenden un arco cuya longitud es igual al radio de la circunferencia. Como la longitud de una circunferencia es 2π radios, resulta que existen 2π radianes en 360° .

Con todo esto, podemos enunciar una fórmula general para conversiones entre estos tres sistemas de ángulos:

$$\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi} = \frac{C}{200}$$

Tipos De Ángulos:

Ángulos adyacentes: Son los que están formados de manera que un lado es común y los otros dos pertenecen a la misma recta.

Ángulo recto: Es el que mide 90° .

Ángulo llano: Es aquel en el que un lado es prolongación del otro y mide 180° .

Ángulos complementarios: Son dos o más ángulos que sumados valen 90° .



Complemento de un ángulo: Se llama complemento de un ángulo a lo que le falta a éste para valer un ángulo recto. El complemento de un ángulo de 30° es un ángulo de 60° .

Ángulos suplementarios: Son los ángulos que sumados valen dos ángulos rectos, es decir, 180° .

Suplemento de un ángulo: Es lo que le falta al ángulo para valer dos ángulos rectos. El suplemento de un ángulo de 60° es un ángulo de 120° .

Problemas Con Ángulos:

➤ Los ángulos suplementarios $\angle AOC$ y $\angle COB$ están en relación 2:3. Hallarlos.

Si asignamos el valor de $2x$ al $\angle AOC$ y $3x$ $\angle COB$, formamos una ecuación de primer grado con una incógnita:

$$2x + 3x = 180^\circ$$

$$5x = 180^\circ$$

$$x = 36^\circ$$

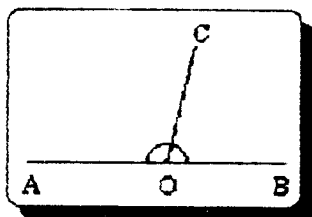
El ángulo AOC mide 72° y el ángulo COB mide 108° .

➤ Hallar el suplemento del ángulo de $123^\circ 9' 16''$.

Se convierten los 180° en $179^\circ 59' 60''$ y se procede con la resta.

$$\begin{array}{r} 179^\circ \quad 59' \quad 60'' \\ -123^\circ \quad 09' \quad 16'' \\ \hline 56^\circ \quad 50' \quad 44'' \end{array}$$

Teorema 2:



«Dos ángulos adyacentes son suplementarios».

Hipótesis: $\angle AOC$ y $\angle BOC$ son ángulos adyacentes.

Tesis: $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$.

Demostración:

$$\angle AOC + \angle BOC = \angle BOA \text{ (Por suma de ángulos).}$$

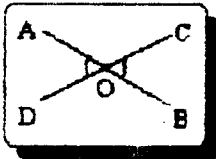
$$\angle BOA = 180^\circ$$



Luego, $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$ (por el axioma que dice que dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí).

Ángulos opuestos por el vértice: Son dos ángulos tales que los lados de uno de ellos son las prolongaciones de los lados del otro

Teorema 3:



«Los ángulos opuestos por el vértice son iguales».

Hipótesis: $\angle AOD$ y $\angle BOC$ son opuestos por el vértice.

Tesis: $\angle AOD = \angle BOC$.

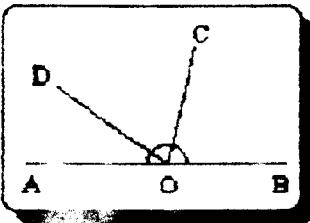
Demostración: $\angle AOD + \angle AOC = 2R$, entonces $\angle AOD = 2R - \angle AOC$.

De igual forma, $\angle BOC + \angle AOC = 2R$, entonces $\angle BOC = 2R - \angle AOC$.

Comparando las igualdades, se tiene que $\angle AOD = \angle BOC$. Análogamente se puede demostrar que $\angle AOC = \angle BOD$.

Ángulos consecutivos: Dos ángulos son consecutivos si tienen un lado común que separe a los otros dos. Varios ángulos son consecutivos si el primero es consecutivo del segundo, éste del tercero y así sucesivamente

Teorema 4:



«Los ángulos consecutivos formados a un lado de una recta suman 180° ».

Hipótesis: $\angle AOD$, $\angle DOC$ y $\angle COB$ son ángulos consecutivos formados a un lado de la recta AB.

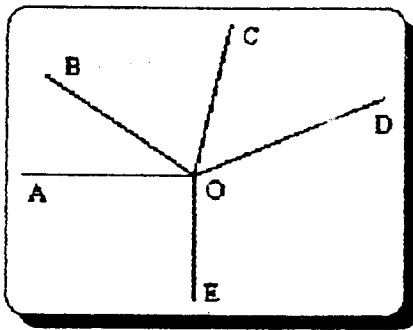
Tesis: $\angle AOD + \angle DOC + \angle COB = 180^\circ$.

Demostración:

$\angle AOD + \angle DOB = 180^\circ$ Por adyacentes.

$\angle DOB = \angle DOC + \angle COB$ Por suma de ángulos.

Sustituyendo las ecuaciones, tenemos que $\angle AOD + \angle DOC + \angle COB = 180^\circ$.

**Teorema 5:**

«La suma de los ángulos consecutivos alrededor de un punto vale cuatro ángulos rectos»

Hipótesis: $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOE$ y $\angle EOA$ son ángulos consecutivos alrededor del punto O.

Tesis: $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOA = 4R$.

Construcción auxiliar: Prolonguemos la recta que une a B con O, de manera que el $\angle DOE$ quede dividido en $\angle DOM$ y $\angle MOE$, tales que $\angle DOM + \angle MOE = \angle DOE$.

Demostración:

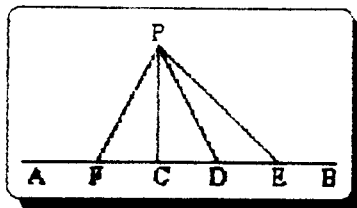
$\angle BOC + \angle COD + \angle DOM = 2R$ y $\angle AOB + \angle EOA + \angle MOE = 2R$. Sumando ambas ecuaciones: $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle EOA + \angle DOM + \angle MOE = 4R$. Recordando la igualdad de ángulos mencionada en la construcción auxiliar, se tiene que:

$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle EOA + \angle DOE = 4R$, como se quería demostrar.

PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO

Se dice que dos rectas son perpendiculares cuando al cortarse forman cuatro ángulos iguales. Cada uno es un ángulo recto. El símbolo de perpendicular es \perp . Es importante el carácter recíproco de la perpendicularidad: «si una recta es perpendicular a otra, ésta es perpendicular a la primera».

Postulado: «Por un punto fuera de una recta, en un plano, pasa una perpendicular a dicha recta y sólo una», todas las demás rectas son oblicuas. El punto en el que cruza una perpendicular a una recta es el pie de la perpendicular. Equivalentemente, los puntos en los que las oblicuas cruzan a la recta son los pies de las oblicuas.

Teorema 6:

«Si por un punto exterior a una recta trazamos una perpendicular y varias oblicuas, se verifica que:

1. El segmento de perpendicular comprendido entre el punto y la recta es menor que cualquier segmento de oblicua.
2. Los segmentos de oblicuas cuyos pies equidistan del pie de la perpendicular, son iguales.



3. De dos segmentos de oblicuas cuyos pies no equidistan del pie de la perpendicular, es mayor aquel que equidista más.

Para la demostración de este teorema utilizaremos el postulado del movimiento: «una figura geométrica puede moverse sin cambiar de tamaño o forma».

Hipótesis: $PC \perp AB$; PF, PD, PE oblicuas a AB ; $CF = CD$; $CE > CD$.

Tesis:

1. $PC < PD$.
2. $PF = PD$.
3. $PE > PD$.

Construcción auxiliar: Dobleemos la figura por AB (postulado del movimiento). El punto P ocupará la posición P' de manera que $CP' = CP$, $P'F = PF$, $P'D = PD$, $P'E = PE$.

Demostración primera parte:

$PC + CP' < PD + DP'$ La distancia más corta entre dos puntos es la recta. Pero tenemos que $PC = CP'$ y que $PD = DP'$, así que $2PC < 2PD$ y por lo tanto $PC < PD$.

Demostración segunda parte:

Dobleemos la figura por PP' de manera que llevemos el semiplano de la izquierda sobre el semiplano de la derecha. El punto F coincidirá con el punto D porque $FC = CD$. Entonces tendremos que $PF = PD$ por coincidir sus extremos y porque por dos puntos pasa una recta y solamente una.

Demostración tercera parte:

$PE + EP' > PD + DP'$ La distancia más corta entre dos puntos es la recta. Pero tenemos que $PE = EP'$ y que $PD = DP'$, así que $2PE > 2PD$ y por lo tanto $PE > PD$.

Teorema recíproco: Si por un punto exterior a una recta se trazan varias rectas que corten a la primera, se verifica:

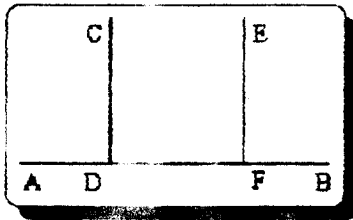
1. El menor de todos los segmentos comprendidos entre el punto y la recta, es perpendicular a ésta.
2. Si dos segmentos oblicuos son iguales, sus pies equidistan del pie de la perpendicular.
3. Si dos segmentos oblicuos son desiguales, el pie del segmento mayor dista más del pie de la perpendicular que el pie del segmento menor.



Distancia de un punto a una recta: Es la longitud del segmento perpendicular trazado desde el punto a la recta. Este segmento tiene las propiedades de ser único y el menor posible.

Paralelismo: Se dice que dos rectas de un plano son paralelas cuando al prolongarlas no tienen ningún punto en común. El paralelismo tiene la propiedad recíproca, es decir: «si una recta es paralela a otra, esta otra es paralela a la primera». Se acepta que toda recta es paralela a sí misma. Esta propiedad se llama propiedad idéntica. El paralelismo se expresa con el signo \parallel . Así, para afirmar que la recta AB es paralela a la recta CD, se expresa: $AB \parallel CD$.

Teorema 7:



«Dos rectas de un plano, perpendiculares a una tercera, son paralelas entre sí»

Hipótesis: $CD \perp AB$; $EF \perp AB$.

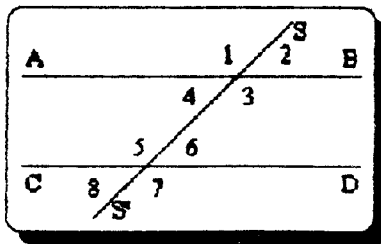
Tesis: $CD \parallel EF$.

Demostración: Supongamos que CD no es paralela a EF. En este caso se cortarían en algún punto, digamos P. Pero entonces tendríamos que por P pasarían dos perpendiculares a la misma recta AB, lo cual es imposible, luego CD y EF no pueden tener ningún punto común y, por lo tanto, son paralelas. Es decir, CD es paralela a EF. Encontramos el siguiente corolario: «Por un punto exterior a una recta, pasa una paralela a dicha recta»

PARALELAS CORTADAS POR UNA SECANTE

Al cortar dos rectas, AB y CD, por una tercera recta SS', llamada secante, se forman ocho ángulos, cuatro en cada punto de intersección. Para designarlos, se numeran en sentido de las manecillas del reloj, como indica la figura.

➤ **Ángulos internos:** Son los ángulos $\angle 4$, $\angle 3$, $\angle 6$ y $\angle 5$.



➤ **Ángulos externos:** Son los ángulos $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 8$ y $\angle 7$.

➤ **Ángulos alternos internos:** $\angle 3$ y $\angle 5$; $\angle 4$ y $\angle 6$.

➤ **Ángulos alternos externos:** $\angle 1$ y $\angle 7$; $\angle 2$ y $\angle 8$.

➤ **Ángulos correspondientes:** $\angle 1$ y $\angle 5$; $\angle 2$ y $\angle 6$; $\angle 3$ y $\angle 7$; $\angle 4$ y $\angle 8$.

➤ **Ángulos conjugados internos:** $\angle 3$ y $\angle 6$; $\angle 4$ y $\angle 5$.

➤ **Ángulos conjugados externos:** $\angle 2$ y $\angle 7$; $\angle 1$ y $\angle 8$.

Postulado: «Toda secante forma con dos paralelas ángulos correspondientes iguales»



Teorema 8:

«Toda secante forma con dos paralelas ángulos alternos internos iguales».

Hipótesis: $AB \parallel CD$; SS' es una secante; $\angle 4$ y $\angle 6$, $\angle 3$ y $\angle 5$ son ángulos alternos internos.

Tesis: $\angle 4 = \angle 6$; $\angle 3 = \angle 5$.

Demostración:

$\angle 4 = \angle 2$ por ser opuestos por el vértice. $\angle 2 = \angle 6$ por ser correspondientes, por lo que $\angle 4 = \angle 6$. Análogamente se puede demostrar que $\angle 3 = \angle 5$.

Teorema recíproco: «Si una secante forma con dos rectas de un plano ángulos alternos internos iguales, dichas rectas son paralelas».

Teorema 9:

«Toda secante forma con dos paralelas ángulos alternos externos iguales».

Hipótesis: $AB \parallel CD$; SS' es una secante; $\angle 1$ y $\angle 7$, $\angle 2$ y $\angle 8$ son ángulos alternos externos.

Tesis: $\angle 1 = \angle 7$; $\angle 2 = \angle 8$.

Demostración:

$\angle 1 = \angle 3$ por ser opuestos por el vértice. $\angle 3 = \angle 7$ por ser correspondientes, por lo que $\angle 1 = \angle 7$. Análogamente se puede demostrar que $\angle 2 = \angle 8$.

Teorema recíproco: «Si una secante forma con dos rectas de un plano ángulos alternos externos iguales, dichas rectas son paralelas».

Teorema 10:

«Dos ángulos conjugados internos, entre paralelas, son suplementarios».

Hipótesis: $AB \parallel CD$; SS' es una secante; $\angle 3$ y $\angle 6$, $\angle 4$ y $\angle 5$ son ángulos conjugados internos.

Tesis: $\angle 3 + \angle 6 = 2R$; $\angle 4 + \angle 5 = 2R$.



Demostración:

$\angle 5 + \angle 6 = 2R$ por ser ángulos adyacentes. $\angle 5 = \angle 3$ por ser ángulos alternos internos, por lo que $\angle 3 + \angle 6 = 2R$. Análogamente se puede demostrar que $\angle 4 + \angle 5 = 2R$.

Teorema recíproco: «Si una secante forma con dos rectas de un plano ángulos conjugados internos suplementarios, dichas rectas son paralelas».

Teorema 11:

«Dos ángulos conjugados externos, entre paralelas, son suplementarios».

Hipótesis: $AB \parallel CD$; SS' es una secante; $\angle 1$ y $\angle 8$, $\angle 2$ y $\angle 7$ son ángulos conjugados internos

Tesis: $\angle 1 + \angle 8 = 2R$; $\angle 2 + \angle 7 = 2R$.

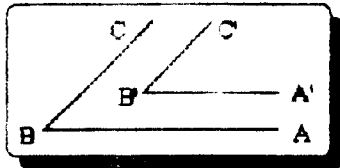
Demostración:

$\angle 7 + \angle 8 = 2R$ por ser ángulos adyacentes. $\angle 7 = \angle 1$ por ser ángulos alternos internos, por lo que $\angle 1 + \angle 8 = 2R$. Análogamente se puede demostrar que $\angle 2 + \angle 7 = 2R$.

Teorema recíproco: «Si una secante forma con dos rectas de un plano ángulos conjugados externos suplementarios, dichas rectas son paralelas».

ÁNGULOS CON LADOS PARALELOS O PERPENDICULARES

Teorema 12:



«Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido son iguales».

Hipótesis: $BA \parallel B'A'$; $BC \parallel B'C'$; el $\angle ABC$ y el $\angle A'B'C'$ tienen sus lados dirigidos en el mismo sentido.

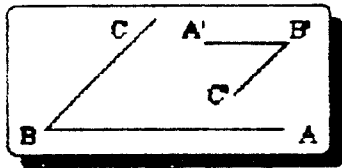
Tesis: $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

Construcción auxiliar: Prolonguemos el lado $B'C'$ hasta que corte el lado BA , formándose el ángulo $\angle \alpha$.

Demostración: $\angle ABC = \angle \alpha$ por correspondientes. $\angle A'B'C' = \angle \alpha$ por correspondientes; por lo que resulta que $\angle ABC = \angle A'B'C'$.



Teorema 13:



«Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en sentido contrario son iguales».

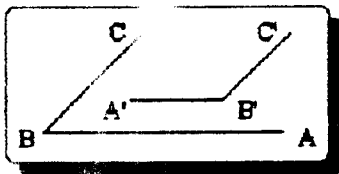
Hipótesis: $BA \parallel B'A'$; $BC \parallel B'C'$; el $\angle ABC$ y el $\angle A'B'C'$ tienen sus lados dirigidos en sentido contrario.

Tesis: $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

Construcción auxiliar: Prolonguemos los lados $A'B'$ y $B'C'$ para formar el ángulo $\angle \alpha$.

Demostración: $\angle ABC = \angle \alpha$ por tener lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido. $\angle A'B'C' = \angle \alpha$ por opuestos por el vértice; por lo que resulta que $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

Teorema 14:



«Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente paralelos, dos de ellos dirigidos en el mismo sentido y los otros dos en el sentido contrario, dichos ángulos son suplementarios».

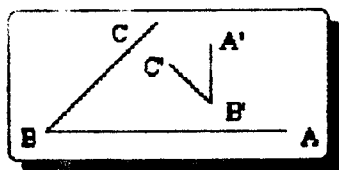
Hipótesis: $BA \parallel B'A'$ y en sentido contrario; $BC \parallel B'C'$ y en el mismo sentido.

Tesis: $\angle ABC + \angle A'B'C' = 180^\circ$.

Construcción auxiliar: Prolonguemos $A'B'$ formándose el ángulo α .

Demostración: $\angle A'B'C' + \angle \alpha = 2R$ por ser adyacentes. $\angle \alpha = \angle ABC$ por tener lados paralelos y del mismo sentido. De estas igualdades se deduce que $\angle A'B'C' + \angle ABC = 2R$.

Teorema 15:



«Dos ángulos agudos cuyos lados son respectivamente perpendiculares son iguales».

Hipótesis: $BA \perp B'A'$; $BC \perp B'C'$; $\angle ABC < 1R$; $\angle A'B'C' < 1R$.

Tesis: $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

Construcción auxiliar: Tracemos por B las semirrectas $BA'' \parallel B'A'$ y $BC'' \parallel B'C'$, de manera que $\angle A''BC'' = \angle A'B'C'$ por tener lados paralelos y del mismo sentido. El $\angle A''BC''$ le llamaremos $\angle \alpha$.



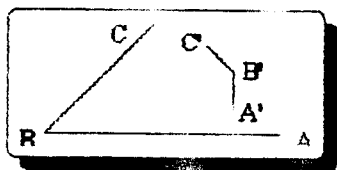
Demostración:

$\angle C''BA'' + \angle \alpha = 1R$, por ser $BC \perp B'C'$ y $BC'' \parallel B'C'$, entonces $BC \perp BC''$.
Trasponiendo, $\angle C''BA'' = 1R - \angle \alpha$.

$\angle ABC + \angle \alpha = 1R$, por ser $BA \perp B'A'$ y $BA'' \parallel B'A'$, por lo que $BA \perp BA''$.
Trasponiendo, $\angle ABC = 1R - \angle \alpha$.

Comparando estas dos igualdades, tenemos que $\angle C''BA'' = \angle ABC$ pero por otro lado, $\angle C''BA'' = \angle A'B'C'$, con lo que resulta: $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

Teorema 16:



«Dos ángulos, uno agudo y otro obtuso, que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son suplementarios».

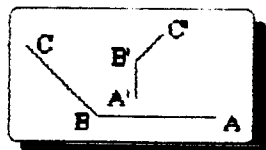
Hipótesis: $B'A' \perp BA$, $B'C' \perp BC$; $\angle ABC < 1R$,
 $\angle A'B'C' > 1R$.

Tesis: $\angle ABC + \angle A'B'C' = 2R$.

Construcción auxiliar: Prolonguemos $A'B'$ hasta que se forme el $\angle \alpha$.

Demostración: $\angle ABC = \angle \alpha$ por tener lados perpendiculares y ser los dos ángulos agudos, $\angle A'B'C' - \angle \alpha = 180^\circ$ por ser adyacentes. De estas dos igualdades podemos deducimos que $\angle A'B'C' + \angle ABC = 180^\circ$.

Teorema 17:



«Dos ángulos obtusos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son iguales».

Hipótesis: $B'A' \perp BA$, $B'C' \perp BC$; $\angle ABC > 1R$,
 $\angle A'B'C' > 1R$.

Tesis: $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

Construcción auxiliar: Prolonguemos AB y $A'B'$ formándose el $\angle \alpha$ y el $\angle \alpha'$, que son iguales por ser agudos y tener sus lados respectivamente perpendiculares.

Demostración: $\angle \alpha + \angle ABC = 180^\circ$ y $\angle \alpha + \angle A'B'C' = 180^\circ$ por ser ángulos adyacentes. También tenemos, por construcción, que $\angle \alpha = \angle \alpha'$. Comparando estas tres igualdades se deduce que $\angle ABC = \angle A'B'C'$.



TRIÁNGULOS

Un triángulo es una porción de plano limitada por tres rectas que se cortan dos a dos. Tiene, por lo tanto, tres lados, tres vértices y tres ángulos. A cada vértice se le asigna una letra mayúscula. El lado opuesto se designa con la misma letra en minúscula. El lado que coincide con la horizontal se le denomina base. El perímetro es la suma de las longitudes de los lados del triángulo. La suma de los ángulos interiores de cada triángulo es igual a 180° . En un triángulo rectángulo, al lado mayor se le denomina hipotenusa y catetos a los lados restantes.

Clasificación De Los Triángulos Atendiendo A Sus Lados:

1. *Triángulo Isósceles:* Es el que tiene dos lados iguales. Los ángulos opuestos a dichos lados también son iguales. El lado desigual suele llamarse base.
2. *Triángulo Equilátero:* Es el que tiene sus tres lados iguales y los tres ángulos también son iguales.
3. *Triángulo Escaleno:* Es el que tiene sus tres lados diferentes y sus tres ángulos diferentes.

Clasificación De Los Triángulos Atendiendo A Sus Ángulos:

1. *Triángulo Acutángulo:* Es el que tiene sus tres ángulos agudos.
2. *Triángulos Obtusángulo:* Es el que tiene un ángulo obtuso.
3. *Triángulo Rectángulo:* Es el que tiene un ángulo recto, generalmente designado con A. Los catetos son los lados que forman el ángulo recto y la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto.

Rectas Y Puntos Notables En El Triángulo:

1. *Mediana:* Es el segmento trazado desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto, se designa por "m". El punto de intersección de las tres medianas se llama "baricentro".
2. *Altura:* Es la perpendicular trazada desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación, se designa por "h". El punto donde concurren las tres alturas se llama "ortocentro".
3. *Bisectriz:* Es la recta notable que corresponde a la bisectriz de un ángulo interior, consecuentemente hay tres bisectrices, una para cada ángulo. El punto donde concurren las tres bisectrices se llama "incentro".
4. *Mediatriz:* Es la perpendicular en el punto medio de cada lado, se denomina con "M". el punto de intersección de las tres mediatrices se llama "circuncentro".

POLÍGONOS

Se llama polígono a la porción de plano limitada por una curva cerrada llamada línea poligonal. El polígono es convexo cuando está formado por una poligonal convexa y cóncavo si está formado por una poligonal cóncava.

Los lados y vértices de la poligonal son los lados y vértices del polígono. Los ángulos internos o interiores de un polígono son los formados por cada dos lados consecutivos.



Los ángulos exteriores o externos de un polígono son los ángulos adyacentes a los interiores, obtenidos prolongando los lados en un mismo sentido. El número de lados del polígono es igual al número de vértices y de ángulos. La línea poligonal que limita al polígono se llama contorno. El perímetro del polígono es igual a la longitud de su contorno, es decir, igual a la suma de la longitud de sus lados. Polígono regular es aquel que tiene todos sus lados y ángulos iguales; es decir, que es equilátero y equiángulo.

La nomenclatura de polígonos según el número de lados es como se indica en la siguiente tabla:

Lados	Nombre	Lados	Nombre	Lados	Nombre
3	Triángulo	7	Heptágono	11	Endecágono
4	Cuadrilátero	8	Octógono	12	Dodecágono
5	Pentágono	9	Eneágono	15	Pentecágono
6	Hexágono	10	Decágono		

Los polígonos no incluidos en esta tabla no tienen nombre especial.

Diagonal: Es el segmento determinado por dos vértices no consecutivos.

Teorema 18:

«La suma de los ángulos interiores ($\Sigma \angle i$) de un polígono convexo es igual a tantas veces dos ángulos rectos como lados menos dos tiene el polígono»

Hipótesis: $\angle A, \angle B, \angle C, \dots$ son los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados.

Tesis: $\Sigma \angle i = \angle A + \angle B + \angle C + \dots = 2R(n-2)$.

Construcción auxiliar: Desde un vértice cualquiera, tracemos todas las diagonales que parten de ese vértice. El polígono quedará descompuesto en $n-2$ triángulos.

Demostración: La suma de los ángulos interiores de los $n-2$ triángulos es igual a la suma de los ángulos interiores del polígono. La suma de los ángulos interiores de cada triángulo vale dos rectos, es decir, $2R$. Como el número de triángulos en que se ha descompuesto en polígonos de n lados es $n-2$, resulta que:

$$\Sigma \angle i = 2R(n-2)$$

Y así, el ángulo interior de un polígono regular es:



$$\angle i = \frac{2R(n-2)}{n}$$

Teorema 19:

«La suma de los ángulos exteriores ($\Sigma \angle e$) de todo polígono convexo es igual a cuatro ángulos rectos»

Hipótesis: $\angle 1, \angle 2, \dots$ son los ángulos exteriores de un polígono convexo de n lados.

Tesis: $\Sigma \angle e = \angle 1 + \angle 2 + \dots = 4R.$

Demostración: El ángulo exterior y el ángulo interior en cada vértice, suman dos rectos por ser adyacentes. Multiplicando este valor por el número de vértices " n " tendremos la suma de todos los ángulos interiores más la suma de todos los ángulos exteriores:

$$\Sigma \angle i + \Sigma \angle e = 2Rn$$

$$\Sigma \angle e = 2Rn - \Sigma \angle i$$

Sustituyendo $\Sigma \angle i = 2R(n-2)$ en la ecuación anterior, resulta:

$$\Sigma \angle e = 2Rn - 2R(n-2)$$

$$\Sigma \angle e = 2Rn - 2Rn + 4R$$

$$\Sigma \angle e = 4R$$

Y el valor de cada ángulo exterior de un polígono regular es:

$$\angle e = \frac{4R}{n}$$

Teorema 20:

«El número de diagonales que pueden trazarse desde un vértice es igual al número de lados menos tres».

Hipótesis: ABC... es un polígono de n lados; d es el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice.

Tesis: $d = n-3.$

Demostración: Si desde un vértice cualquiera se trazan todas las diagonales posibles, siempre habrá tres vértices a los cuales no se puede trazar diagonal: el vértice desde el cual se trazan y los dos vértices contiguos. Como el número de vértices es igual al número de lados n , resulta $d = n-3.$

**Teorema 21:**

«Si n es el número de lados del polígono, el número total de diagonales D que pueden trazarse desde todos los vértices está dada por la fórmula $D = \frac{n(n-3)}{2}$.»

Hipótesis: ABC... es un polígono de n lados y D es el número total de diagonales.

$$\text{Tesis: } D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Demostración: Desde un vértice pueden trazarse $n-3$ diagonales; como hay n vértices, el número de diagonales será $n(n-3)$. Pero como cada diagonal une dos vértices, de esta manera hemos contado doble número de diagonales. Luego:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Teorema 22:

«Dos polígonos son iguales si pueden descomponerse en igual número de triángulos respectivamente iguales y dispuestos del mismo modo».

Hipótesis: ABCDE y A'B'C'D'E' son dos polígonos tales que:

- > $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$
- > $\triangle ACD = \triangle A'C'D'$
- > $\triangle ADE = \triangle A'D'E'$

Tesis: ABCDE = A'B'C'D'E'.

Demostración: Siendo respectivamente iguales los triángulos en que han quedado descompuestos ambos polígonos, resulta que los lados de los polígonos son iguales, por ser lados de triángulos iguales. Además, los ángulos son iguales, por oponerse a lados iguales en triángulos iguales y por suma de ángulos respectivamente iguales. Por lo tanto, ABCDE = A'B'C'D'E' por tener lados y ángulos respectivamente iguales.

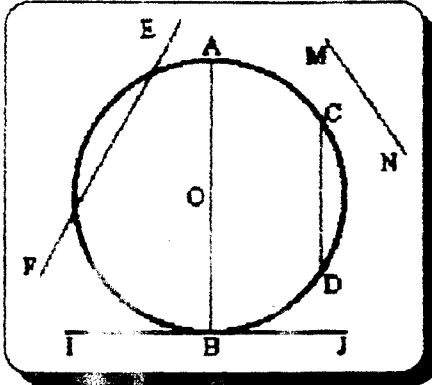
Recíproco: «Si dos polígonos son iguales, se pueden descomponer en igual número de triángulos respectivamente iguales e igualmente dispuestos».

CIRCUNFERENCIA

Circunferencia es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de otro punto llamado centro. La circunferencia se denomina por su centro mediante una letra mayúscula y radio (r).



Los puntos cuya distancia al centro es mayor que el radio se llaman puntos exteriores; los que distan del centro menos que el radio se llaman puntos interiores y si su distancia al centro es igual al radio, son puntos que pertenecen a la circunferencia. Circunferencias iguales son las que tienen radios iguales.



Arco: Distancia menor sobre la circunferencia de dos puntos de la misma (OCD).

Cuerda: Recta que une dos puntos de la circunferencia. Arco correspondiente es el menor de los que determina (CD).

Dímetro: Cuerda especial que une dos puntos de la circunferencia y que pasa por el centro (AB). Es igual a dos radios.

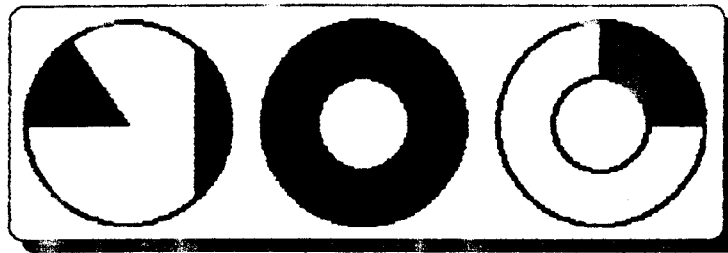
Secante: Recta que tiene dos puntos comunes con la circunferencia (EF).

Tangente: Recta que tiene un sólo punto común con la circunferencia (IJ).

Exterior: Recta que no tiene ningún punto común con la circunferencia (MN).

Círculo

Círculo es el conjunto de todos los puntos de la circunferencia y de los interiores a la misma.



Sector circular: Área comprendida entre dos radios y un arco.

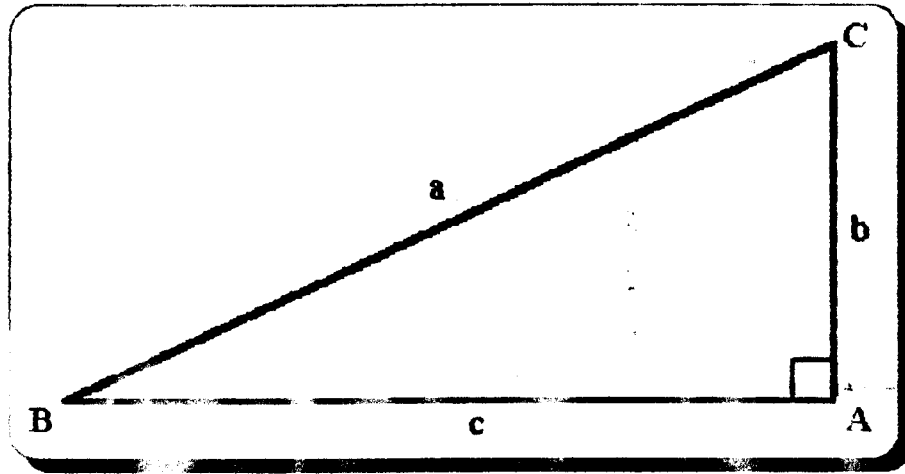
Segmento circular: Área comprendida entre una cuerda y su arco correspondiente.

Corona circular: Área delimitada por dos circunferencias que coinciden en origen y plano con radios distintos.

Trapezo circular: Formado por dos radios de una corona.



Trigonometría



TEOREMA DE PITÁGORAS

«La suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo, es igual a la hipotenusa al cuadrado». $a^2 = b^2 + c^2$.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Seno: Es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa. Seno del ángulo B se escribe "sin B".

Coseno: Es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa. Coseno del ángulo B se escribe "cos B".

Tangente: Es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente. Tangente del ángulo B se escribe "tan B".

Cotangente: Es la razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto. Cotangente del ángulo B se escribe "cot B".

Secante: Es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente. Secante del ángulo B se escribe "sec B".

Cosecante: Es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto. Cosecante del ángulo B se escribe "csc B".

Funciones Trigonómicas:

Función	General	$\angle B$	$\angle C$
Seno	$\sin \theta = \frac{CO}{H}$	$\sin B = \frac{b}{a}$	$\sin C = \frac{c}{a}$
Coseno	$\cos \theta = \frac{CA}{H}$	$\cos B = \frac{c}{a}$	$\cos C = \frac{b}{a}$
Tangente	$\tan \theta = \frac{CO}{CA}$	$\tan B = \frac{b}{c}$	$\tan C = \frac{c}{b}$
Cotangente	$\cot \theta = \frac{CA}{CO}$	$\cot B = \frac{c}{b}$	$\cot C = \frac{b}{c}$
Secante	$\sec \theta = \frac{H}{CA}$	$\sec B = \frac{a}{c}$	$\sec C = \frac{a}{b}$
Cosecante	$\csc \theta = \frac{H}{CO}$	$\csc B = \frac{a}{b}$	$\csc C = \frac{a}{c}$

Signos De Las Funciones Trigonómicas Según El Cuadrante:

	I	II	III	IV
Seno	+	+	-	-
Coseno	+	-	-	+
Tangente	+	-	+	-
Cotangente	+	-	+	-
Secante	+	-	-	+
Cosecante	+	+	-	-

Valores De Los Ángulos Que Limitan Los Cuadrantes:

	0°	90°	180°	270°
Seno	0	1	0	-1
Coseno	1	0	-1	0
Tangente	0	∞	0	∞
Cotangente	∞	0	∞	0
Secante	1	∞	-1	∞
Cosecante	∞	1	∞	-1

Relaciones Fundamentales Entre Las Funciones Trigonómicas:

$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$	$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$	$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$
$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$	$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$	$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$
$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$	$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Identidad trigonométrica es una igualdad algebraica entre funciones de un mismo ángulo, que se verifica para cualquier valor que se atribuye a dicho ángulo. Para comprobar una identidad trigonométrica, es decir, para evidenciar que el primer miembro de la igualdad propuesta es idéntico al segundo, hay que efectuar en el primer miembro todas las operaciones que sean necesarias, sin efectuar cambio alguno en el segundo, hasta que los dos miembros sean idénticos.

Ejemplo:

$$\frac{\cos \theta}{\cot \theta} = \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos \theta}{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}} = \cos \theta \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sin \theta$$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ecuación trigonométrica es una igualdad algebraica entre razones trigonométricas de un mismo ángulo que sólo se satisface para determinado valor o valores del ángulo. Por ejemplo, $2\cos\alpha = \sec\alpha$ es una ecuación que se satisface para $\alpha=45^\circ$.

Raíz de una ecuación trigonométrica es todo valor del ángulo que la satisface. Resolver una ecuación trigonométrica es hallar su raíz o raíces. Las ecuaciones trigonométricas, al igual que las algebraicas, pueden ser de cualquier grado y simultáneas. Para resolver una ecuación trigonométrica que contiene diferentes funciones, se transforma en otra equivalente que contenga una sola función y se vuelve luego a los procedimientos algebraicos ordinarios.

Como las funciones trigonométricas de ángulos que se diferencian en un número exacto de vueltas son iguales, será necesario añadir a las soluciones obtenidas un múltiplo cualquiera de 360° . Esto no es necesario si nos indican que el ángulo es menor de 360° .

Como ejemplo tenemos:

$$2 \cos \theta \tan \theta - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cos \theta \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \sin \theta - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = \frac{1}{2}$$

raíz = 30°

En ciertas ocasiones será necesario emplear la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Un triángulo cualquiera está perfectamente determinado si se conocen tres de sus elementos (entre ángulos y lados) siempre que uno de ellos sea un lado. Y como un triángulo rectángulo siempre tiene un ángulo recto, está determinado por dos de sus elementos, siempre que uno de ellos sea un lado.

Resolver un triángulo consiste en calcular los elementos faltantes. Para resolver los triángulos rectángulos, tenemos los siguientes casos:

1. Dados los dos catetos.
2. Dados un cateto y la hipotenusa.
3. Dados un cateto y un ángulo agudo.
4. Dados la hipotenusa y un ángulo agudo.

Para resolver un triángulo rectángulo recurriremos al Teorema de Pitágoras y a las funciones trigonométricas antes descritas.

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Para la resolución de los triángulos oblicuángulos se puede aplicar la ley de los senos y la ley de los cosenos:

Ley de los senos: «Los lados de un triángulo oblicuángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos».

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Ley de los cosenos: «El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo de dichos lados por el coseno del ángulo que forman». Por ejemplo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Encontramos los siguientes tres casos de resolución de triángulos oblicuángulos:

1. Conocidos los tres lados.
2. Conocidos dos lados y el ángulo comprendido.
3. Conocidos un lado y dos ángulos.



Área De Los Triángulos Oblicuángulos:

El área de los triángulos oblicuángulos se puede determinar en función de sus lados. Se obtiene el semiperímetro (s) sumando la longitud de los lados y dividiendo el resultado entre dos. Con este dato y la longitud de los lados, aplicamos la siguiente ecuación.

$$A_{\Delta} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$