CENTRO DE BACHILLERATO TECNOLÓGICO, industrial y de servicios #130

Matemáticas II:

Álgebra.

Profesor: Ing. Arturo Varela Gutiérrez.

Cruz Fierro Carlos Francisco.

Especialidad: Técnico Laboratorista Clínico.

Semestre: II.

Enero - Junio 1992.

Factorización

Es un proceso contrario a la multiplicación; es decir, que el producto se puede descomponer en factores. Factor es cada uno de los elementos que al multiplicarse entre sí dan lugar a un producto.

Factor común: Es el o los factores que aparecen en todos los términos de los polinomios. El factor común puede encontrarse en forma de monomio o de polinomio.

I. Factores De Un Monomio:

Un monomio cualquiera se puede descomponer en dos partes, una numérica y otra literal, y éstas, a su vez, en diversos factores:

$$12a^2b^3 = (12)(a^2b^3) = (2)(2)(3)\,(a)(a)(b)(b)(b)$$

II. Factor Común Monomio:

1. El factor común numérico es el M.C.D. de los coeficientes de los términos y para las literales se emplea el exponente menor.
2. Se divide el polinomio entre el factor que se ha encontrado.

$$4a^2x + 6ax^2 - 2ax = 2ax(2a + 3x - 1)$$

III. Factor Común Polinomio:

Operar como en el caso anterior, agrupando el polinomio en un paréntesis y manejándolo como un sólo término.

$$ab(a + b) - 3(a + b) = (a + b)(ab - 3)$$

IV. Diferencia De Cuadrados:

1. Raíz Cuadrada del primer término más raíz cuadrada del segundo término; por,
2. la diferencia del binomio resultante en el paso anterior.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

V. Suma De Cubos:

1. Suma de las raíces cúbicas de los cubos; por,
2. cuadrado de la raíz cúbica del primer término, menos el producto de las dos raíces cúbicas, más el cuadrado de la segunda raíz.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

VI. Diferencia De Cubos:

1. Diferencia de las raíces cúbicas de los cubos; por,

2. cuadrado de la raíz cúbica del primer término, más el producto de las dos raíces cúbicas, más el cuadrado de la segunda raíz.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

VII. Trinomio Cuadrado Perfecto:

1. Se determinan las raíces cuadradas del primer y tercer términos, habiendo ordenado el trinomio.

2. El signo del segundo término se emplea para separar las raíces.

3. El binomio resultante se eleva al cuadrado.

$$a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2$$

VIII. Trinomio De La Forma x^2+bx+c:

1. Se ordena descendentemente con respecto a x^2.

2. El primer término de ambos factores es la raíz cuadrada del primer término del trinomio.

3. El signo del primer factor es el signo del segundo término del trinomio.

4. El signo del segundo factor es el producto del signo del segundo por el tercero.

5. Se encuentran los factores de *c*, de forma que su suma o diferencia sea *b* y se colocan en los binomios en orden descendente por su valor absoluto.

$$x^2 - 7x - 30 = (x - 10)(x + 3)$$

XI. Polinomio Cubo Perfecto:

1. Se determinan las raíces cúbicas del primer y cuarto término del polinomio.

2. El signo del segundo o cuarto término separando las raíces.

3. El binomio resultante se eleva al cubo.

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

X. Trinomio Cuadrado Perfecto Por Adición Y Sustracción:

1. Se determinan las raíces cuadradas.

2. Se calcula la cantidad que falta para completar un trinomio cuadrado perfecto, la cual se suma y se resta del trinomio.

3. Se factoriza el trinomio y se deja indicada la cantidad sobrante.

Fracciones Algebráicas

Una fracción cualquiera consta de dos cantidades, un numerador dividido entre un denominador. Así mismo, una fracción algebraica consta de dos expresiones algebraicas dividiéndose, por ejemplo:

$$\frac{ax+by}{2x+2y}$$

Fracción Impropia: Es aquella cuyo numerador es igual o mayor que el denominador.

Fracción Propia: Es aquella en que el numerador es menor que el denominador.

Fracción Compleja: Es aquella cuyo numerador, denominador o ambos, son fracciones.

Principios De Las Fracciones Algebraicas:

1. Si una fracción algebraica se multiplica y se divide por una misma cantidad, la fracción no se altera.

2. Si el numerador de una fracción algebraica se multiplica o se divide por una cantidad, la fracción queda multiplicada o dividida respectivamente por dicha cantidad.

3. Si el denominador de una fracción algebraica se multiplica o se divide por una cantidad, la fracción queda dividida o multiplicada respectivamente por dicha cantidad.

Signos De Las Fracciones Algebraicas:

Las fracciones algebráicas tienen tres signos asociados:

$$\pm\frac{\pm x}{\pm y}$$

De acuerdo con las leyes de la multiplicación y división, es posible efectuar las siguentes alteraciones:

1. Se puede cambiar el signo de la fracción y el del numerador o el del denominador sin alterar la fracción.

2. En los factores del numerador y del denominador de una fracción, los signos de los términos de dos factores cualesquiera pueden cambiarse sin alterar la fracción; o los signos de los términos de un factor pueden cambiarse si se cambia el signo de la fracción.

Operaciones Con Fracciones Algebraicas

I. Simplificación:

Para reducir fracciones cuyo numerador y denominador sean monomios, se simplifican los coeficientes dividiéndolos entre su máximo común divisor y las literales se dividen directamente.

Para reducir fracciones cuyo numerador y denominador sean polinomios, se factoriza el numerador y el denominador y luego se eliminan los términos comunes.

II. Suma Y Resta:

1. Se reducen las fracciones dadas al mínimo común denominador.
2. Se efectúan las multiplicaciones que están indicadas.
3. Se efectúa la suma de los numeradores.
4. Se reducen términos semejantes en el numerador.
5. Se simplifica la fracción resultante si es posible.

$$\frac{3}{2a}+\frac{a-2}{5a^2}=\frac{3(3a)}{6a^2}+\frac{a-2}{5a^2}=\frac{9a}{6a^2}+\frac{a-2}{6a^2}=\frac{9a+a-2}{6a^2}=\frac{10a-2}{6a^2}=\frac{2(5a-1)}{6a^2}=\frac{5a-1}{3a^2}$$

III. Multiplicación:

1. Se factorizan los términos de las fracciones dadas.
2. Se simplifica por cancelación multiplicativa.
3. Se multiplican los numeradores y los denominadores.

$$\frac{3x-3}{2x+4}\times\frac{x^2+4x+4}{x^2-x}=\frac{3(x-1)}{2(x+2)}\times\frac{(x+2)^2}{x(x-1)}=\frac{3(x+2)}{2x}=\frac{3x+6}{2x}$$

IV. División:

Para dividir fracciones algebraicas se multiplica el dividendo por el divisor invertido.

$$\frac{4a^2}{3b^2}\div\frac{2ax}{9b^3}=\frac{4a^2}{3b^2}\times\frac{9b^3}{2ax}=\frac{6ab}{x}$$

V. Fracciones Complejas:

1. Se efectúan las operaciones indicadas en el numerador y en el denominador.
2. Se dividen los resultados obtenidos en cada caso.
3. Se simplifica el resultado final.

Ecuaciones

Definiciones

Ecuación: La ecuación es una igualdad en la que intervienen letras cuyos valores son desconocidos y se denominan incógnitas, las cuales se indican generalmente con las últimas letras del alfabeto. Cuando alguno o algunos de los valores de las incógnitas hacen verdadera la igualdad de la ecuación se establece que dichos valores satisfacen la ecuación; por lo que una ecuación es una igualdad condicionada.

La ecuación consta de un primer miembro y un segundo miembro, separados por el signo = (igual a):

$$4x-5 = 16-3x$$

Identidad: La identidad es una igualdad que se verifica para cualquier valor que adquieren las incógnitas contenidas en dicha identidad, por lo que no es una igualdad condicionada. La identidad emplea el mismo símbolo de la ecuación:

$$x^2+10x+25 = (x+5)^2$$

Grado de las ecuaciones: El grado de una ecuación queda determinado por el mayor exponente al que está elevada la incógnita en la ecuación considerada.

$$2x^3+x^2-18x+15 = 0 \quad \text{(Tercer grado)}$$

Resolver una ecuación es encontrar el valor o valores que adquieren la o las incógnitas para satisfacer la ecuación. A este resultado se le llama *solución* o *raíz*.

Leyes De Las Igualdades:

1. Si sumamos o restamos una misma cantidad a ambos miembros, la igualdad persiste.

2. Si multiplicamos o dividimos ambos miembros por igual cantidad, la igualdad persiste.

De estas dos leyes inferimos que podemos transferir un término de un lado a otro de la ecuación, invirtiendo la operación que se encuentra realizando (suma por resta, multiplicación por división). Este principio se llama *transposición de términos*.

Solución De Ecuaciones De Primer Grado Con Una Incógnita

Resolver una ecuación lineal con una incógnita significa encontrar la raíz o valor para la incógnita que satisfaga la ecuación dada. El método de solución para ecuaciones de primer grado con una incógnita consta de los siguientes pasos:

1. Se agrupan en un miembro de la ecuación los términos que contienen la incógnita y en el otro miembro los términos constantes.

2. Se reducen términos semejantes apoyándose con las propiedades y principios que anteriormente se explicaron para llegar a la solución.

$$x-8 = 1-2x$$
$$x+2x = 1+8$$
$$3x = 9$$
$$x = \frac{9}{3}$$
$$x = 3$$

Solución De Sistemas De Ecuaciones De Primer Grado Con Dos Incógnitas

Se llama sistema de ecuaciones a un conjunto de dos o más ecuaciones que tienen idénticas soluciones; es decir, que las soluciones satisfacen a cada una de las ecuaciones dadas. También se le llama sistema de ecuaciones simultáneas. Hay tres métodos básicos para encontrar la solución a estos sistemas:

1. Igualación:

1. Despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones.

2. Se igualan entre sí los dos valores de la incógnita despejada.

3. Se resuelve la ecuación así obtenida.

4. Se sustituye la solución encontrada en cualquiera de las ecuaciónes originales (preferentemente la más sencilla) para obtener la solución de la otra incógnita.

Ejemplo: Resolver el sistema $\begin{cases} 7x + 4y = 13 \\ 5x - 2y = 19 \end{cases}$

$$7x = 13 - 47 \Rightarrow x = \frac{3-4y}{7}$$
$$5x = 19 + 2y \Rightarrow x = \frac{9+2y}{5}$$

$$\frac{13-4y}{7}=\frac{19+2y}{5}$$

Al resolver esta ecuación, la raíz es y=-2. Este valor se sustuye en cualquiera de las ecuaciones:

$$7x+4(-2)=13$$
$$7x-8=13$$
$$7x=21$$
$$x=3$$

Por lo tanto, el resultado es x=3 y y=-2.

2. Sustitución:

1. Despejar una incógnita cualquiera de cualquiera de las dos ecuaciones.

2. El valor así obtenido se sustituye en la otra ecuación.

3. Se resuelve la ecuación que resulte.

4. Se sustituye el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones originales.

Ejemplo: Resolver el sistema $\begin{cases} 2x+5y=-24 \\ 8x-3y=19 \end{cases}$

$$2x=-24-5y \Rightarrow x=\frac{-24-5y}{2}$$

$$8\left(\frac{-24-5y}{2}\right)-3y=19$$

Con ésto tenemos una ecuación con una incógnita, cuya solución es y=-5. Ahora se sustituye este resultado en cualquiera de las ecuaciones dadas:

$$2x+5(-5)-3y=19$$
$$2x-25=-24$$
$$2x=1$$
$$x=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, el resultado es $x=\frac{1}{2}$ y y=-5.

3. Reducción (Suma-Resta):

1. Por multiplicación, se igualan los coeficientes de una de las incógnitas, observando que tengan signos distintos.

2. Se suman las ecuaciones obtenidas, quedando como resultado una ecuación de una incógnita.

3. Se resuelve esa ecuación y el resultado se sustituye en cualquiera de las ecuaciones originales a fin de encontrar la otra raíz.

Ejemplo: Resolver el sistema $\begin{cases} 5x + 6y = 20 \\ 4x - 3y = -23 \end{cases}$

$$5x+6y=20$$
$$8x-6y=-46$$

Ahora se suman las ecuaciones resultantes, quedando $13x=-26$, de donde se saca que $x=-2$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación, tenemos:

$$5(-2)+6y=20$$
$$-10+6y=20$$
$$6y=30$$
$$y=5$$

Así, la solución es $x=-2$ y $y=5$

Solución De Sistemas De Ecuaciones De Primer Grado Con 3 Incógnitas

Para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas se emplean los diferentes métodos algebraicos descritos para un sistema de ecuaciones de dos incógnitas (sustitución, igualación, suma-resta). El método de reducción (adición y sustracción) es el que más se emplea, ya que permite una mayor rapidez de solución.

El objetivo de resolver un sistema de este tipo es llegar a reducirlo a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Para ello se toman las ecuaciones de dos en dos para eliminar la misma incógnita en cada caso.

1. De las tres ecuaciones dadas se combinan dos de ellas y se elimina una de las incógnitas, dando lugar a una ecuación con dos incógnitas.

2. De las dos ecuaciones anteriores, se escoge una de ellas y se combina con la ecuación que no se ha empleado, eliminando de ellas la misma incógnita, obteniéndose así otra ecuación con dos incógnitas.

3. Se resuelve el sistema de ecuaciones resultantes de los pasos anteriores por cualquiera de los métodos algebraicos determinando los valores para las dos incógnitas.

4. Se sustituyen los valores determinados en cualquiera de las tres ecuaciones originales dadas para encontrar el valor de la tercera incógnita.